ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 4.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

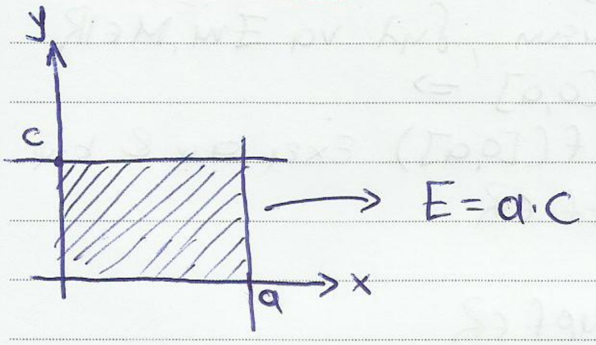
ΜΕΡΟΣ Α': ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

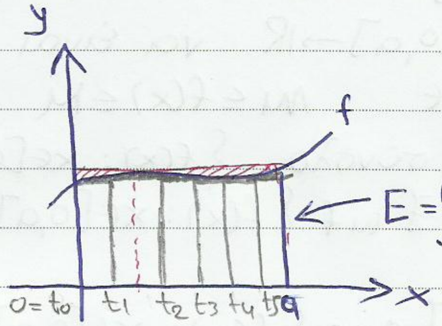
1) ολοκλήρωση πραγματικών συναρτήσεων πάνω από $U \subseteq \mathbb{R}^n$
2) α. Επικαμπύλια ολοκλήρωμα πραγματικών συναρτήσεων
   β. " " διανυσματικού πεδίου
3) α. Επιφανειακό ολοκλήρωμα πραγματικών συναρτησ.
   β. " " διανυσματικού πεδίου.

ΜΕΡΟΣ Β':

Ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων και Σειρές fourier.

Υπενθύμιση:





$E = \int_0^a f(x)\,dx$

Διαμέριση του $[0,a]$
$P = \{t_0, t_1, \dots, t_5\}$

Και σύνολο υποδιαστημάτων:
$S_P = \{[t_{i-1}, t_i] : i = 1, \dots, 5\}$ για τη διαμέριση P.

Κάτω άθροισμα: $L(P,f) = \sum_{S \in S_P} \inf(f|S) \cdot v(S)$
όπου $v(S) = t_i - t_{i-1}$
για το διάστημα $S = [t_{i-1}, t_i]$
δηλαδή $v(S)$ = μήκος του S.

Άνω άθροισμα: $U(P,f) = \sum_{S \in S_P} \sup(f|S) \cdot v(S)$
όπου $v(S) = t_i - t_{i-1}$
για το διάστημα $S = [t_{i-1}, t_i]$
δηλαδή $v(S)$ = μήκος του S.

Επίσης, γνωρίζουμε από Απ.2

$\mathcal{L}f = \sup\limits_{P} \mathcal{L}(P,f)$ και $Uf = \cancel{\sup} U(P,f)$

και είχαμε δείξει ότι $\mathcal{L}f \leq Uf$

καθώς, εάν $\mathcal{L}f = Uf$ τότε η $f:[a,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση ολοκληρώσιμη.
και $\int_0^a f(x)dx = \mathcal{L}f = Uf$

ΙΚΑΝΗ ΣΥΝΘΗΚΗ:

Για να ισχύουν τα προηγούμενα
(δηλ. για να έχουμε πάντα πραγματικούς θα πρέπει η
$f:[0,a] \to \mathbb{R}$ να είναι φραγμένη, δηλ να $\exists m, M \in \mathbb{R}$
$(m<M)$ ώστε $m \leq f(x) \leq M$, $\forall x \in [0,a]$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ Το σύνολο $\{f(x) : x \in [0,a]\} = f([0,a])$ έχει α.φ & κ.φ.
$\xRightarrow{\text{Αξ. πληρότ.}}$ $\exists \inf\{f(x) : x \in [0,a]\} =: \inf f \in \mathbb{R}$

και

$\exists \sup\{f(x) : x \in [0,a]\} =: \sup f \in \mathbb{R}$

Έστω ότι $U \subseteq \mathbb{R}^n$ και $f: U \to \mathbb{R}$
Η f λέγεται φραγμένη αν $\exists M, m \in \mathbb{R}$, $m<M$
έτσι ώστε $m \leq f(\bar{x}) \leq M$, $\forall \bar{x} \in U$ τότε όμοια
$\underbrace{\exists \inf\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in U\}}_{\inf f}$ και $\underbrace{\exists \sup\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in U\}}_{\sup f}$

Όπως διαμερίζαμε το διάστημα στον $\mathbb{R}$
Έτσι, διαμερίζουμε και στον $\mathbb{R}^3$ τον κύβο
σε μικρά "κυβάκια"